$$\boxed{MTTR = P_D(0).(-G_{22})^{-1}.1_{nd}}$$

$$P_D(0) = [0 \quad 0 \quad 1] \qquad G_{22} = \begin{bmatrix} -(\lambda_2+\mu_1+\beta) & 0 & \lambda_2 \\ 0 & -(\lambda_1+\mu_2+\beta) & \lambda_1 \\ 0 & 0 & -(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix} \qquad 1_{nf} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

③

[0 1] pr matrice 2x2

$$\boxed{MUT = \frac{\Pi_F.G_{11}.G_{11}^{-1}.1_{nf}}{\Pi_F.G_{12}.1_{nd}} = \frac{\Pi_F.1_{nf}}{\Pi_F.G_{12}.1_{nd}} = \frac{\Pi_F.1_{nf}}{\Pi_D.G_{21}.1_{nf}}}$$

$$\boxed{MDT = \frac{\Pi_D.1_{nd}}{\Pi_D.G_{21}.1_{nf}} = \frac{\Pi_D.1_{nd}}{\Pi_F.G_{12}.1_{nd}}}$$

$$G_{12} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad G_{21} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \mu_2 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Pi = [\Pi_F, \Pi_D]$ est le vecteur ligne des probabilités d'état asymptotiques $(t \to \infty)$

$\Pi_F = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3 \quad \pi_4]$ est le vecteur ligne des probabilités asymptotiques des états de fonctionnement

$\Pi_D = [\pi_5 \quad \pi_6 \quad \pi_7]$ est le vecteur ligne des probabilités asymptotiques des états de panne

La prise en compte de la durée de la commutation, même infime, augmente l'indisponibilité du système, par rapport au cas où la commutation s'est fait instantanément. En effet, lorsqu'il n'y a pas de durée de commutation les états 5 et 6 de la commutation n'apparaîtront dans la chaîne de Markov, le seul état d'indisponibilité étant l'état 7. Les probabilités d'état $P_5 = P_6 = 0$ et l'indisponibilité $\overline{A} = P_7$ lorsqu'il n'y a pas de durée de commutation.
Lorsque la durée de commutation n'est pas nulle l'indisponibilité du système est $\overline{A} = P_5 + P_6 + P_7$ avec $P_5 \neq 0$ et $P_6 \neq 0$.

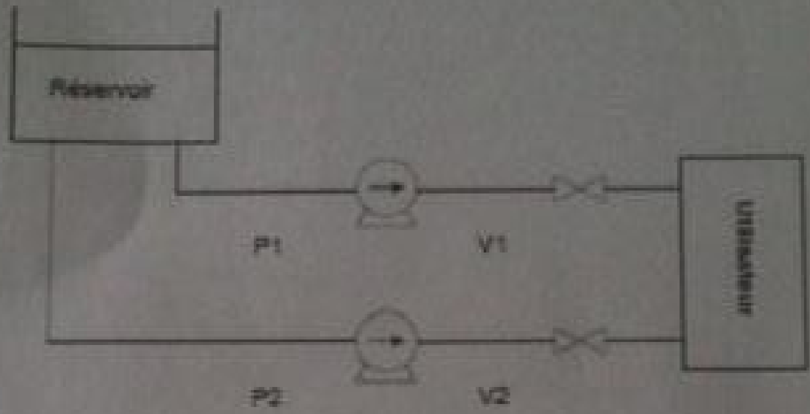
DE LORRAINE

Examen de « Sûreté de Fonctionnement »

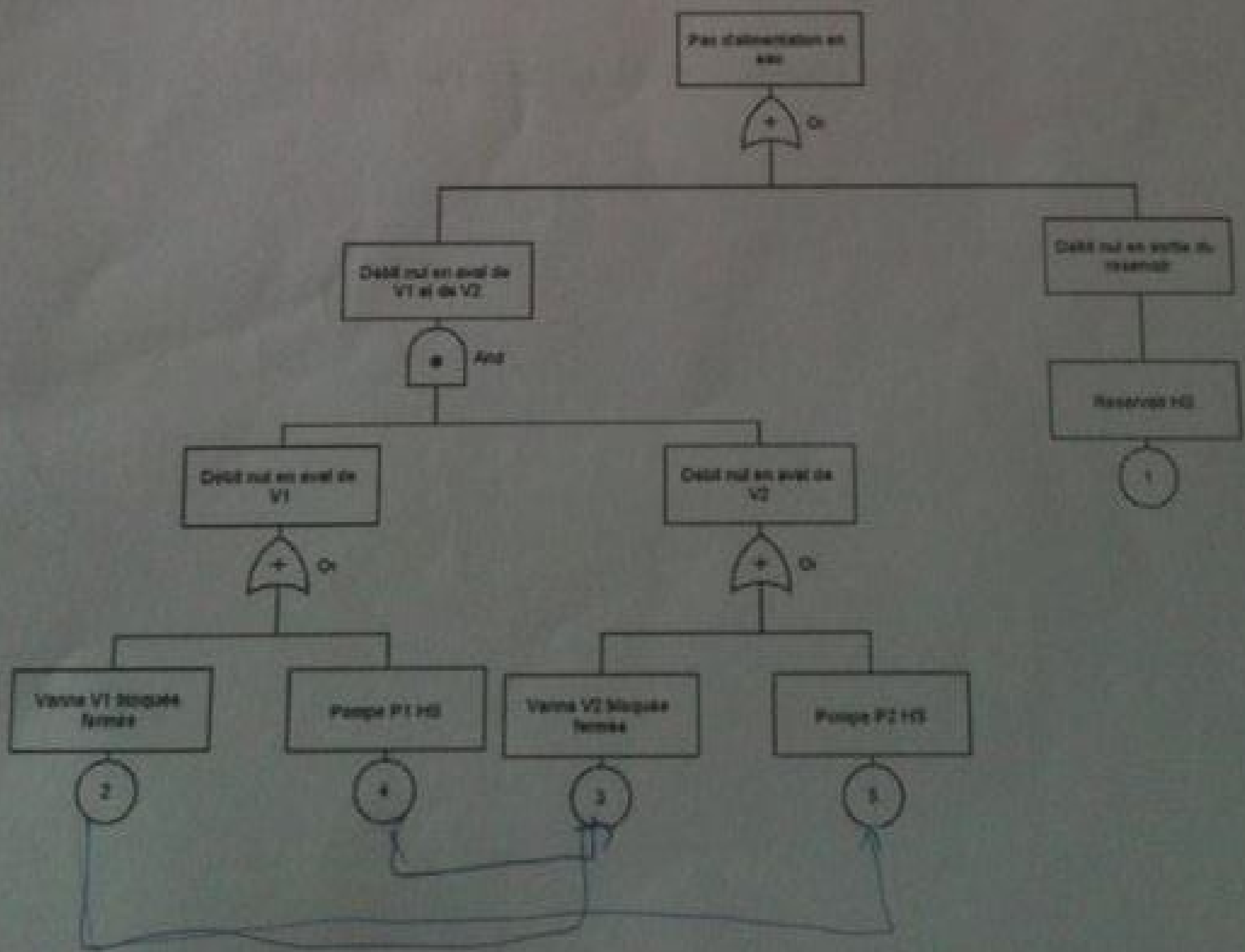
Documents et calculatrice autorisés, durée 1h15

1. Etude d'un système d'alimentation en eau. Arbre des défaillances

Soit le système de la figure ci-dessous qui doit assurer l'alimentation en eau d'un utilisateur final à partir d'un réservoir. Deux lignes sont prévues pour l'alimentation en eau de l'utilisateur, une d'elle pouvant être suffisante pour assurer la mission du système.

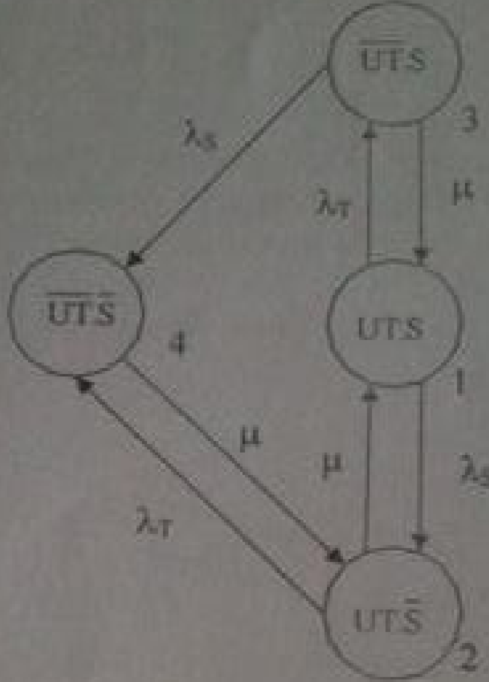


ne étude de sûreté de fonctionnement de ce système doit être réalisée et pour cela l'arbre des éfaillances suivant a été établi.



Solut… e 4

Un be… ès que UT ou S sont HS.



La matr… ux de transition est :

$$[A]=\begin{bmatrix} -\lambda_T-\lambda_S & \lambda_S & \lambda_T & 0 \\ \mu & -\mu-\lambda_T & 0 & \lambda_T \\ \mu & 0 & -\mu-\lambda_S & \lambda_S \\ 0 & \mu & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Le vecte… ats étant: $[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$

Taux éq… de défaillance et de réparation de chaque bras :

$[C_{11}] = [\ \ldots - \ldots_S]$

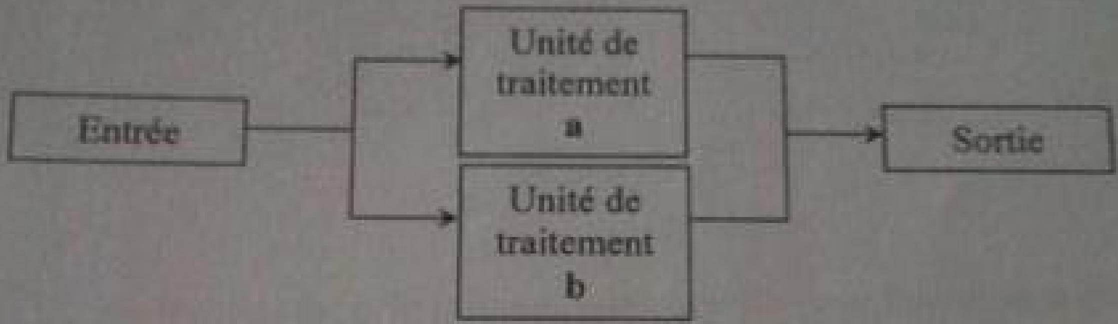
MTTF $= [\ldots_T+\lambda_S]^{-1}.[1]=\dfrac{1}{\lambda_T+\lambda_S}=$ xxxh

D'où $\lambda_T = \ldots \lambda_S =$ xxxh^{-1}

$$[C_{22}]= \begin{bmatrix} \ldots & 0 & \lambda_T \\ & -\mu-\lambda_S & \lambda_S \\ & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Système en redondance chaude avec temps de commutation[1]

Soit un système contenant deux unités de traitement de données (**a** et **b**) fonctionnant en redondance chaude : les deux unités de traitement fonctionnent en parallèle, mais seulement une est utilisé à un instant donné pour fournir la sortie. Pendant leur fonctionnement, les deux unités de traitement peuvent tomber en panne avec des taux de défaillance constants λ_a, respectivement λ_b et elles sont réparées avec des taux de réparation constants μ_a, respectivement μ_b. Lorsque l'unité de traitement utilisée pour fournir la sortie tombe en panne, le système commute sur la deuxième unité de traitement (si celle-ci est en état de fonctionnement) après un temps de commutation qui suit une loi exponentielle de paramètre β.



1. Sous l'hypothèse que l'entrée et la sortie sont non défaillantes, établir la chaîne de Markov qui modélise ce système.
2. Déduire la matrice des probabilités de transition de cette chaîne de Markov.
3. Exprimer la disponibilité du système en tant que somme des probabilités d'état.
4. Donner les expressions de MTTFF, MTTR, MUT et MDT en définissant chaque terme qui entre dans ces expressions.
5. Quel est l'influence de la prise en compte du temps de commutation sur l'indisponibilité du système, par rapport au cas où la commutation d'une unité de traitement à l'autre se fait instantanément ? Argumenter votre réponse par rapport à la chaîne de Markov établie précédemment.

Corrigé

Etat $((a^*,b),1)$ - a fonctionne, b fonctionne, a est utilisée pour fournir la sortie (*) et le système fonctionne

Etat $((\underline{a}^*,b),0)$ - a est défaillante, b fonctionne, a est utilisée pour fournir la sortie (*) et le système est en panne

$$A=\begin{array}{c}\hspace{14em} G_{11} \\ \left[\begin{array}{cccc|ccc}
-(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\
\mu_2 & -(\lambda_1+\mu_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\
0 & 0 & -(\lambda_2+\mu_1) & \mu_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\
0 & 0 & \lambda_1 & -(\lambda_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_2 & 0 \\
\hline
\mu_1 & 0 & \beta & 0 & -(\lambda_2+\mu_1+\beta) & 0 & \lambda_2 \\
0 & \beta & 0 & \mu_2 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2+\beta) & \lambda_1 \\
0 & \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_1+\mu_2)
\end{array}\right]\end{array}$$

$$A(t)=P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)+P_4(t)$$

$$\boxed{MTTFF=P_F(0).(-G_{11})^{-1}.1_{af}}$$

$$P_F(0)=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \quad G_{11}=\begin{bmatrix}-(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -(\lambda_1+\mu_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_2+\mu_1) & \mu_1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & -(\lambda_1+\lambda_2)\end{bmatrix} 1_{af}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

[1 0] pr matrice 2x2